Л 15. Несобственные интегралы Примеры

В случае если область интегрирования представляет из себя неограниченный промежуток или если функция имеет разрыв 2-го рода в своей области интегрирования, введенное выше понятие определенного интеграла как предела интегральных сумм не применимо, а определенные интегралы в этих случаях определяют следующим образом

§1 Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,+\infty)$. Несобственным интегралом от a до $+\infty$ от этой функции называется предел:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Если этот предел существует (равен числу), то несобственный интеграл называется сходящимся; если он не существует, то интеграл называется расходящимся. В случае, если $f(x) \geq 0$ в промежутке $[a,+\infty)$, такой интеграл выражает площадь неограниченной фигуры с границами: $y = 0$, $x = a$ $(x \geq a)$ и графиком функции $y = f(x)$. Для сходящегося интеграла эта площадь конечна, для расходящегося – бесконечна.

Практически эти интегралы удобно находить с помощью следующего следствия из теоремы Ньютона – Лейбница.

Следствие 1. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,+\infty)$ и $y = F(x)$ - ее первообразная, тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

Пример1. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \ln x - \ln 1 = \infty.$

Следовательно, этот интеграл расходится.

Пусть теперь функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $(-\infty, b]$. Тогда несобственным интегралом от $-\infty$ до b называется предел

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Такой интеграл (при $f(x) \geq 0$) выражает площадь фигуры с границами:

$$y = 0, \quad x = b \quad (x \leq b) \quad \text{и} \quad y = f(x).$$

Следствие 2. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $(-\infty, b]$ и $y = F(x)$ – ее первообразная, тогда

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на всей числовой оси, то ***несобственным интегралом** от* $-\infty$ *до* $+\infty$ называется следующая сумма двух интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

(здесь c - некоторое число). Это определение не зависит от выбора c. Такой интеграл называется ***сходящимся***, если сходятся оба интеграла:

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

Если хотя бы один из этих интегралов расходится, то интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ *называется* ***расходящимся***. При $f(x) \geq 0$ интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ выражает площадь области с границами $y = 0$ и $y = f(x)$.

Следствие 3. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на всей числовой оси и $y = F(x)$ ее первообразная. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

Пример 2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}x - \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

§2 Несобственные интегралы от разрывных функции

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,b)$ и имеет разрыв в точке b. Несобственным интегралом от a до b слева от этой функции называется предел слева

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{c\to b-0} \int_{a}^{c} f(x)dx.$$

Иногда такой интеграл обозначают также через $\int_{a}^{b} f(x)dx$.

Следствие 4. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,b)$ и $y = F(x)$ - ее первообразная в этом промежутке, то

$$\int_a^{b-} f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \lim_{x\to b-0} F(x) - F(a).$$

Пример 3.

$$\int_{-1}^{0-} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^{0} = \lim_{x\to 0-0} \ln|x| - \ln|-1| = -\infty - 0$$

т. е. интеграл расходится.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $(a, b]$ и имеет разрыв в точке a, то несобственным интегралом от a справа до b от этой функции называется предел справа

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a} \int_c^b f(x)dx.$$

Следствие 5. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $(a, b]$ и $y = F(x)$ -ее первообразная в этом промежутке, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - \lim_{x\to a+0} F(x).$$

Следующий случай самый коварный, поскольку запись этих несобственных интегралов не отличается от записи определенных интегралов от непрерывных функций.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в отрезке $[a, b]$ за исключением точки c из интервала (a, b), в которой функция имеет разрыв. *Тогда несобственным интегралом по этому отрезку* называется следующая сумма двух несобственных интегралов:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Такой интеграл называется сходящимся только в том случае, когда сходятся оба записанных справа интеграла.

Пример 4.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x}.$$

Как показано выше, интеграл $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x}$ расходится, следовательно и $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ также расходится. Нахождение этого интеграла по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^{1}$$

не верно, поскольку подынтегральная функция $y = \frac{1}{x}$ имеет разрыв в точке 0.

§3 *Признаки сходимости несобственных интегралов*

Для того чтобы ответить на вопрос сходится или нет данный несобственный интеграл, совершенно не обязательно его вычислять. Установить сходимость интеграла можно с помощью следующих теорем, в которых исследуемый интеграл сравнивается с известным сходящимся или расходящимся интегралом. Эти теоремы называются признаками сходимости. Для определенности сформулируем эти признаки для интегралов вида $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, хотя они верны для всех типов несобственных интегралов.

Теорема (Первый признак сравнения)

Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны в промежутке $[a,+\infty)$ и в этом промежутке выполняется неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$.

Верны следующие утверждения

а) Если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ также сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$.

б) Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ также расходится.

Пример 5. Исследуем сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5+1}$. В промежутке $[1,+\infty)$ выполняется неравенство $\frac{1}{x^5+1} \le \frac{1}{x^5}$, обе функции непрерывны и

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = \frac{x^{-6}}{-6}\Bigg|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-6}{6x^6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \qquad (\ne \infty).$$

Тогда по первому признаку сравнения исходный интеграл сходится.

Теорема (предельный признак сходимости)

Пусть неотрицательные в промежутке $[a,+\infty)$ функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ непрерывны в этом промежутке и существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A,$$

который не равен 0 и ∞. Тогда несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Пример 6. Исследуем сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{(\sqrt{x}+1)dx}{x^2+x+1}$. Заметим, что функция

$f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}$ непрерывна в промежутке $[1,+\infty)$. Отбросим в числителе и знаменателе этой функции члены с меньшими степенями и получим функцию $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2}=x^{-1,5}$. Поскольку

$$A=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}:x^{-1,5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x^{-1,5}}{x^2+x+1}=1$$

и интеграл

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{1,5}}=\left.\frac{x^{-0,5}}{-0,5}\right|_1^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-0,5}}{0,5}+2=2$$

сходится, то исходный интеграл также сходится по предельному признаку сходимости.